جامعة البعث — تحليل عقدي/2/ — اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات — الفصل الأول 2015-2016

السؤال الأول : (12+13=25درجة)

1"- أوجد قيمة التكامل $I_1 = \int_{|z|=a} \frac{b+z}{z(b-z)} dz$ علماً" أن $0<b<a$

2"- أوجد قيمة التكامل $I_2 = \int_{|z|=3} \left(\frac{z^2}{z^3-3z^2+3z-1} + \frac{e^{z-1}}{z^2} \right) dz$

السؤال الثاني : (25درجة)

أوجد نشر لورانت للدالة $f(z) = \frac{z^2-4z+2}{z(z-2)}$ في النطاق $2<|z-2|$ ثم حدد نوع نقطة اللانهاية وما هي قيمة الراسب عندها .

السؤال الثالث : (10+15=25درجة)

عين النقاط الشاذة وصنفها لكل من

$$f_1(z) = \frac{4z-\pi}{z\sin(4z)} \quad \& \quad f_2(z) = \frac{1}{z^2 chz} e^{\frac{1}{2z-i}}$$

السؤال الرابع : (15+10=25درجة)

اعتماداً" على نظرية الرواسب أوجد قيمة التكاملين

$$I_1 = \int_{|z|=2} \frac{z-1}{z^3-4z^2+3z} dz \quad \& \quad I_2 = \int_{|z|=2} \frac{chz}{e^{4z}-1} dz$$

****

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

الإجابات النموذجية مع سلم درجات أسئلة مقرر التحليل العقدي /2/ الفصل الأول

2016-2015

جواب السؤال الأول : (12+13=25درجة)

"1- النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة $z(b-z)=0$ أي $z=0 \wedge z=b$ وهاتان النقطتان تقعان في داخلية الكفاف المعطى لذلك نحيط النقطة $z=0$ بدائرة C_1 نصف قطرها صغير بقدر كاف كما نحيط النقطة $z=b$ بدائرة C_2 بحيث أن $C_1 \cap C_2 = \phi$ عندئذ حسب مبرهنة كوشي جورسات للمناطق المتعددة الترابط يكون

$$I_1 = \int_{|z|=a} \frac{b+z}{z(b-z)} dz = \int_{C_1} \frac{\frac{b+z}{b-z}}{z} dz - \int_{C_2} \frac{\frac{b+z}{z}}{z-b} dz = 2\pi i - 4\pi i = -2\pi i$$

"2 - $$I_2 = \int_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-1)^3} dz + \int_{|z|=3} \frac{e^{z-1}}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{2} (z^2)'' + \frac{2\pi i}{1} . (e^{z-1})'_{z=0}$$

ومنه $$I_2 = 2\pi i + 2\pi i\, e^{-1} = 2\pi i \left(\frac{e+1}{e}\right)$$

جواب السؤال الثاني:(15+5+5=25درجة)

$$f(z) = \frac{z^2-4z+2}{z(z-2)} = \frac{z^2-4z+4-2}{z(z-2)} = (z-2) . \frac{1}{2+z-2} - \frac{2}{z-2} . \frac{1}{2+z-2}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{2}{z-2}} - \frac{2}{(z-2)^2} . \frac{1}{1+\frac{2}{z-2}} = 1 - \frac{2}{z-2} + \frac{4}{(z-2)^2} - \frac{8}{(z-2)^3} + \dots$$

$$- \frac{2}{(z-2)^2} \left[1 - \frac{2}{(z-2)} + \frac{4}{(z-2)^2} - \frac{8}{(z-2)^3} + \dots \right]$$

$$f(z) = 1 - \frac{2}{z-2} + \frac{2}{(z-2)^2} - \frac{4}{(z-2)^3} + \dots \qquad 2 < |z-2|$$

$b_1 = -2$

-١-٨

من هذا نستنتج أنّ نقطة اللانهاية هي نقطة شاذة قابلة للاصلاح اما قيمة الراسب عندها فهي $Res(f(z),\infty)=-b_1 \Rightarrow Res(f(z),\infty)=2$

جواب السؤال الثالث : (10+15=25درجة)

"1 – النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ فهي جذور المعادلة $z.\sin 4z=0$

ومنه فانه إمّا $z=0$ وإمّا $\sin(4z)=0 \Leftarrow 4z=n\pi \Leftarrow z=\frac{n\pi}{4}$

حيث $n=0,\pm1,\pm2,....$ من أجل $n=0$ تكون $z=0$ ومنه فأنّ هذه النقطة تكون صفر من الدرجة الثانية للمقام وبالتالي فهي قطب من الرتبة الثانية للدالة f_1

ومن أجل $n=1$ تكون $z=\frac{\pi}{4}$ صفر للمقام من الدرجة الأولى كما أنها صفر للبسط من الرجة الأولى إذا" هي نقطة شاذة قابلة للأصلاح للدالة f_1 ، أمّا من أجل باقي القيم ل n فأنّ النقاط $z=\frac{n\pi}{4}$ فتكون أصفار من الدرجة الأولى للمقام فهي أقطاب بسيطة للدالة f_1.

"2- النقاط الشاذة للدالة f_2 فهي جذور المعادلة $2z-1=0$ وجذور المعادلة $z^2 shz=0$ ومنه من المعادلة الأولى نجد أنّ $z=\frac{1}{2}$ وبما أنّ $\lim_{z\to\frac{1}{2}} f_2(z)$ غير موجودة فأنّ هذه النقطة هي نقطة شاذة أساسية ومن المعادلة الثانية يكون أمّا $z^2=0$ أو $shz=0 \Leftarrow n=0,\pm1,\pm2,..$, $z=n\pi i$ ومن أجل $n=0$ تكون $z=0$ اي أنّ هذه النقطة هي صفر من الدرجة الثالثة للمقام وبالتالي فهي قطب من الرتبة الثالثة للدالة f_2 امّ من أجل باقي القيم فتكون النقاط أصفار من الدرجة الأولى للمقام فهي أقطاب بسيطة للدالة f_2.

جواب السؤال الرابع : (13+12=25درجة)

1-
$$I_1 = 2\pi i . \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res} f(z)$$

النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة $z^3 - 4z^2 + 3z = 0$ وبالتالي فأن هذه الجذور هي $z = 0 \wedge z = 1 \wedge z = 3$ النقطة $z = 0$ تقع في داخلية الكفاف وهي قطب بسيط وبالتالي فأن $\mathrm{Res} \frac{z-1}{z^3 - 4z^2 + 3z} = \frac{z-1}{3z^2 - 8z + 3} = \frac{-1}{3}$

النقطة $z = 1$ تقع في داخلية الكفاف وهي نقطة شاذة قابلة للأصلاح ومنه $\mathrm{Res} f(z) = 0$

والنقطة $z = 3$ تقع في خارجية الكفاف وبالتالي فأن $I_1 = -\frac{2\pi i}{3}$ ،

2- النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة $e^{4z} - 1 = 0$ ومنه فأن $4z = 2\pi i$

اي ان $z = \frac{n\pi i}{2}$ ، $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ من أجل $n = 0$ تكون النقطة $z = 0$ وهذه النقطة هي قطب بسيط وتقع في داخلية الكفاف ومنه فأن $b_1 = \mathrm{Res} \frac{chz}{e^{4z} - 1} = \frac{1}{4}$

أما من أجل $n = 1$ فأن النقطة الشاذة $z = \frac{\pi i}{2}$ تكون نقطة شاذة قابلة للأصلاح وقيمة الراسب عندها تكون مساوية للصفر أما من أجل $n = -1$ فتكون $z = \frac{-\pi i}{2}$ وهي أيضاً قابلة للأصلاح وقيمة الراسب عندها تكون أيضاً مساوية للصفر أما من أجل باقي قيم فتكون النقاط الشاذة تقع في خارجية الكفاف لذلك فأن $I_2 = 2\pi i b_1 = \frac{\pi i}{2}$

****

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح





Scanned by CamScanner